

投稿類別：數學類

篇名：

乘乘與末末的曖昧關係

作者：

宋采寧。臺中市私立葳格高級中學。高三乙班

沈 遙。臺中市私立葳格高級中學。高三乙班

指導老師:

黃俊賢老師

壹●前言

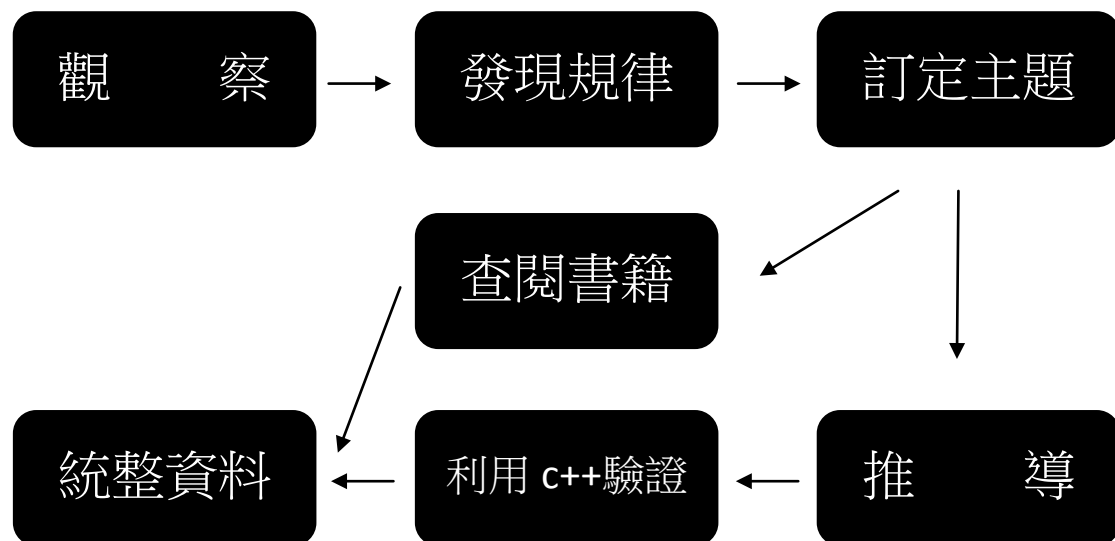
一、研究動機：

次方一直與我們息息相關，國小時我們學習九九乘法表，國中時開始接觸次方的運算，到了高中我們運用次方完成了許多的方程式。我們在運算過程中發現某些數字的次方有它特定的規律，像是最簡單的一位數 0、1、5、6 的任何正整數次方末位數依然是它們本身，發現這個規律後燃起我們的研究欲望。

二、研究目的：

0 的任何正整數次方為 0；1 的任何正整數次方為 1；5 的任何正整數次方的個位數為 5；6 的任何正整數次方的個位數為 6。二位數字 25 的任何正整數次方，末兩位恆為 25，那還有哪些二位數的任何正整數次方之末兩位數字仍是此二位數嗎？有三位數(abc)的任何正整數次方所得的末三位仍是此三位數(abc)嗎？有四位數($abcd$)的任何正整數次方所得的末四位仍是此四位數($abcd$)嗎？……

三、研究流程：



圖一：小論文研究過程流程圖(自繪)

決定研究主題後，就現有已習得的數學知識及查閱書籍(註一)，進行數學化的邏輯推導、分析來縮小需要考慮與驗證的數字範圍。經由免費軟體 Dev-C++(註二)、運算網站 WolframAlpha(註三)來進行運算與驗證，進而整理出結論。

貳●正文

一、問題探討與分析

- (一) (ab) 為一個二位數， (ab) 的任何正整數次方的末兩位數字仍為 (ab) ，則這樣的二位數有哪些呢？

設 p 為二位數，對於任何大於或等於 2 的正整數 n ， p^n 的末兩位數為 p ，則

$$p^n - p = 100k,$$

其中 k 為一正整數，可改寫為

$$p(p^{n-1} - 1) = 100k,$$

又 p^{n-1} 的末兩位數為 p ，於是上式可寫為

$$p[(100r + p) - 1] = 100k,$$

其中 r 為一正整數或 0，於是我們得知

$$100 \mid p(p-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

即

$$(2^2 \cdot 5^2) \mid p(p-1),$$

而 p ， $(p-1)$ 一個為奇數，另一個為偶數，所以有以下兩種情形：

$$(i) \quad 2^2 \mid p, \quad 5^2 \mid (p-1) \quad \text{或} \quad (ii) \quad 5^2 \mid p, \quad 2^2 \mid (p-1),$$

經討論後可得 $p = 25$ 或 $p = 76$ 。

- (二) (abc) 為一個三位數， (abc) 的任何正整數次方的末三位數字仍為 (abc) ，則這樣的三位數有哪些呢？

設 p 為三位數，對於任何大於或等於 2 的正整數 n ， p^n 的末三位數為 p ，則

$$p^n - p = 1000k,$$

其中 k 為一正整數，可改寫為

$$p(p^{n-1} - 1) = 1000k,$$

又 p^{n-1} 的末三位數為 p ，於是上式可寫為

$$p[(1000r + p) - 1] = 1000k,$$

其中 r 為一正整數或 0，於是我們得知

$$1000 \mid p(p-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

即

$$(2^3 \cdot 5^3) | p(p-1),$$

而 $p, (p-1)$ 一個為奇數，另一個為偶數，所以有以下兩種情形：

$$(i) \ 2^3 | p, 5^3 | (p-1) \quad \text{或} \quad (ii) \ 5^3 | p, 2^3 | (p-1),$$

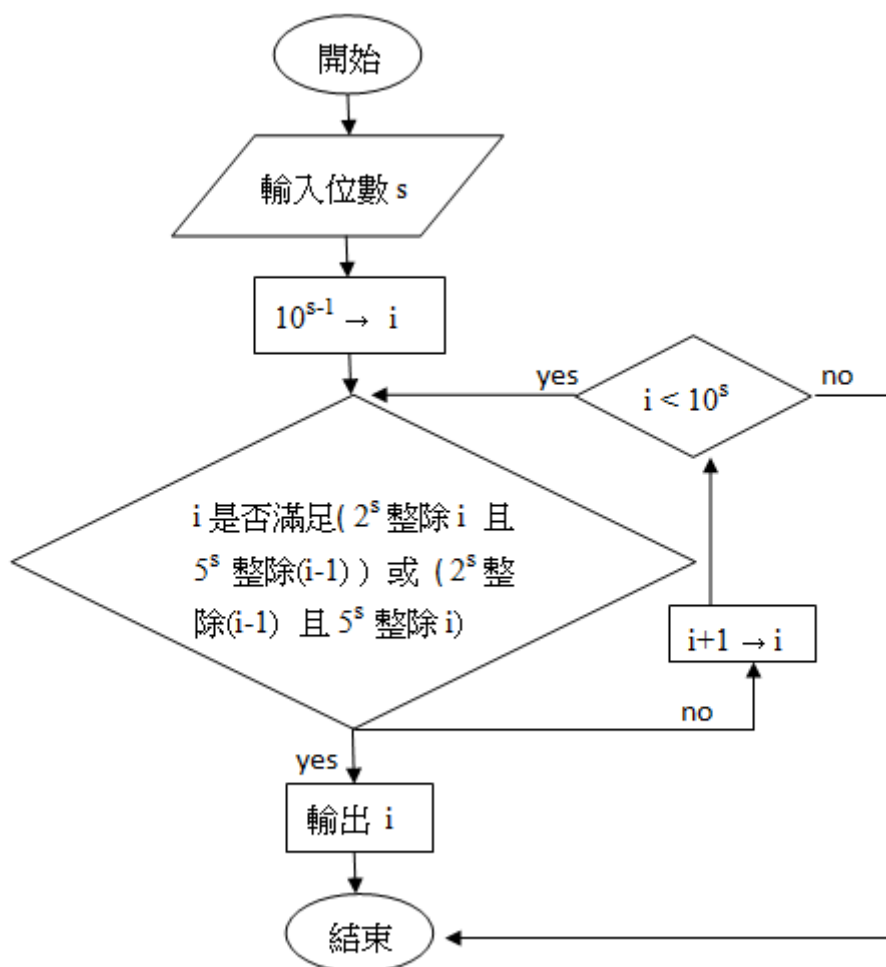
經討論後可得 $p = 625$ 或 $p = 376$ 。

由以上對二位數與三位數的分析，我們不難得知：當 p 為 m 位數，對於任何大於或等於 2 的正整數 n ， p^n 的末 m 位數為 p ，則 p 會滿足下列兩情形之一：

$$(i) \ 2^m | p, 5^m | (p-1) \quad \text{或} \quad (ii) \ 5^m | p, 2^m | (p-1)。$$

二、運用軟體運算

若要討論到多位數的情形，單靠人工運算檢驗，肯定會花許多時間，於是我們勢必要藉由軟體來幫我們完成這辛苦的任務。我們在網路上找到免費的軟體 Dev-C++，以下為我們的程式流程圖與運算程式：



圖二：程式流程圖(自繪)

表一：C++程式碼

C++ 程式碼	輸出結果
<pre> #include <iostream> #include<cmath> using namespace std; int main() { int input = 0; int remain = 0; int s ; cout << "輸入位數 : "; cin >> input; int n = pow(2,input); int m = pow(5,input); for(int i = pow(10, input-1); i < pow(10, input); i++) { if(i%n==0 && (i-1)%m==0 i%m==0 && (i-1)%n==0) { cout << " " << i ; } else { s+=i; } } return 0; } </pre>	二位數：25, 76 (兩者和為 101)
	三位數：625, 376 (兩者和為 1001)
	四位數：9376
	五位數：90625
	六位數：890625 109376 (兩者和為 1000001)
	七位數：2890625 7109376 (兩者和為 10000001)
	八位數：12890625 87109376 (兩者和為 100000001)
	九位數：212890625 787109376 (兩者和為 1000000001)
	十位數：8212890625 1787109376 (兩者和為 10000000001)
	十一位數起，本程式未能 計算出結果。以下試著找 出規律，並以運算網站 WolframAlpha 來進行運 算與驗證。

二位數的結果為 25 與 76，兩者的和為 101。三位數的結果為 625 與 376，兩者的和為 1001。四位數與五位數的結果只有單個，分別為 9376 與 90625。六位數的結果為 890625 與 109376，兩者的和為 1000001。七位數的結果為 2890625 與 7109376，兩者的和為 10000001，...。他們隱藏著什麼樣的規律呢？

參●結論

現在我們試著說明所發現的規律，首先我們由二位數討論起，在正文的二位數討論中，我們得知

$$100 \mid p^2 - p \Leftrightarrow 100 \mid p^2 - p - 100p \Leftrightarrow 100 \mid p(101 - p)$$

因此，當知道 25 為 $100 \mid p^2 - p$ 的一個解，即 25 為 $100 \mid p(101 - p)$ 的一個解，則可知 76 為 $100 \mid p^2 - p$ 的另一個解。同理，由三位數的討論中得知

$$1000 \mid p^2 - p \Leftrightarrow 1000 \mid p^2 - p - 1000p \Leftrightarrow 1000 \mid p(1001 - p)$$

因此，當知道 625 為 $1000 \mid p^2 - p$ 的一個解，即 625 為 $1000 \mid p(1001 - p)$ 的一個解，則可知 376 為 $1000 \mid p^2 - p$ 的另一個解。

四位數的結果 9376，如果加上 625 就會等於 10001，但 625 非四位數，所以不列出。五位數的結果 90625，如果加上 9376 就會等於 100001，但 9376 非五位數，所以不列出。

由二位數的討論中之式子 ① 可知，要找二位數 p ，使得 p 的任何正整數次方的末兩位數仍是 p ，只須確認 p^2 的末兩位數仍是 p 即可，即 $100 \mid p(p-1)$ 。由三位數的討論中之式子 ② 可知，要找三位數 p ，使得 p 的任何正整數次方的末三位數仍是 p ，只須確認 p^2 的末三位數仍是 p 即可，即 $1000 \mid p(p-1)$ 。依此類推可知，要找 m 位數 p ，使得 p 的任何正整數次方的末 m 位數仍是 p ，只須確認 p^2 的末 m 位數仍是 p 即可。我們使用運算網站 WolframAlpha 來進行運算與觀察，如下，

表二：運算與觀察(一)

n	p_n	p_n^2	滿足條件的 n 位數
2	25	<u>625</u>	25 , 76(=101- 25)
3	625	39 <u>0625</u>	625 , 376(=1001- 625)
4	0625	3 <u>90625</u>	9376 (=10001- 625)
5	90625	8212 <u>890625</u>	90625 (100001- 90625= 9376 非五位數)
6	890625	79321 <u>2890625</u>	890625 , 109376 (=1000001- 890625)
7	2890625	83557 <u>12890625</u>	2890625 , 7109376
8	12890625	166168 <u>212890625</u>	12890625 , 87109376
9	212890625	4532241 <u>8212890625</u>	212890625 , 787109376

10	8212890625	674515724 <u>18212890625</u>	8212890625 , 1787109376
11	18212890625	331709384 <u>918212890625</u>	18212890625 , 81787109376
12	918212890625	84311491250 <u>9918212890625</u>	918212890625
13	9918212890625	983709469437 <u>59918212890625</u>	9918212890625
14	59918212890625	3590192236006 <u>259918212890625</u>	59918212890625 , 40081787109376

由上表分析可推知， p_n^2 的末 $(n+1)$ 位數為 p_{n+1} ，若 p_{n+1} 確為 $(n+1)$ 位數，則 p_{n+1} 的任何正整數次方的末 $(n+1)$ 位數仍是 p_{n+1} ，當 $(10^{n+1} + 1 - p_{n+1})$ 也為 $(n+1)$ 位數時， $(10^{n+1} + 1 - p_{n+1})$ 的任何正整數次方的末 $(n+1)$ 位數仍是 $(10^{n+1} + 1 - p_{n+1})$ 。若 p_{n+1} 非 $(n+1)$ 位數，則 $(10^{n+1} + 1 - p_{n+1})$ 的任何正整數次方的末 $(n+1)$ 位數仍是 $(10^{n+1} + 1 - p_{n+1})$ 。

為了更快速得到上表中的 p_n ，我們更可藉由強大的 WolframAlpha 網站計算出 $5^{2^{n-1}}$ ，而 $5^{2^{n-1}}$ 的末 n 位數即為 p_n ，如下表所示

表三：運算與觀察(二)

n	$5^{2^{n-1}}$	$5^{2^{n-1}}$ 的末 n 位	n	$5^{2^{n-1}}$	$5^{2^{n-1}}$ 的末 n 位
2	5^2	25	9	5^{256}	212890625
3	5^4	625	10	5^{512}	8212890625
4	5^8	0625	11	5^{1024}	18212890625
5	5^{16}	90625	12	5^{2048}	918212890625
6	5^{32}	890625	13	5^{4096}	9918212890625
7	5^{64}	2890625	14	5^{8192}	59918212890625
8	5^{128}	12890625	15	5^{16384}	259918212890625

利用以上方法，就可以不用逐個逐個去平方求末 n 位數。藉由好的運算工具，我們就能更迅速計算出所要的參考數 p_n ，進而求出我們要的 n 位數 p ，使得 p 的

任何正整數次方的末 n 位數仍是 p 。

肆●引註資料

一、引註資源

註一、楊健貴(2010)。C++**新手上路**。台北縣：全華。章節 3-1,4-2,6-2。

註二、**BloodshedSoftware**，2014/11/10 取自：<http://bloodshed.net/devcpp.html>。

註三、**WolframAlpha**，2014/11/09 取自：<http://www.wolframalpha.com/>。

二、參考書目

(一)、許志農(主編)(2012)。高中數學**第一冊**。台北市：龍騰。

(二)、許志農(主編)(2012)。高中數學**第二冊**。台北市：龍騰。